



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ДГТУ)**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»  
Второй семестр**

Предназначено для студентов первого курса заочной формы обучения  
(полного курса) по направлению подготовки 38.05.02

г. Ростов-на-Дону

2024

В пособии приведены варианты заданий контрольной работы № 2 для студентов заочной формы обучения (полный курс) по темам, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины «Математика» во втором семестре, сформулированы методические рекомендации по их выполнению. Рассмотрены также образцы решения всех заданий и краткие теоретические сведения, используемые в этих решениях

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2 .....	5
ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАНИЙ ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2 .....	7
КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ.....	17
ПЕРЕЧЕНЬ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ .....	38
СПИСОК ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ.....	39
ИНТЕРНЕТ-ИСТОЧНИКИ.....	40

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

*Уважаемые студенты!*

Для качественного освоения учебного материала дисциплины «Математика» и успешного выполнения заданий контрольной работы №2 Вам необходимо, прежде всего, изучить теоретический материал, затем рассмотреть и проанализировать примеры решения практических задач. В этом Вам помогут разобрать указанные в нашем пособии информационные источники, а также приведенный в пособии очень краткий конспект лекций.

После этого вы можете приступить к выполнению заданий своего варианта.

Будьте внимательны к определению номера вашего варианта. Правило его выбора достаточно простое, оно сформулировано перед заданиями контрольной работы.

При самостоятельном решении и оформлении заданий вашего варианта Вам будет полезно использовать рассмотренный в пособии образец выполнения и оформления всех заданий контрольной работы. Выполнять задания целесообразно поэтапно, по темам.

В пособии также приведены вопросы для подготовки к экзамену по темам, включенным в контрольную работу №2. Их изучение рекомендуется начинать при выполнении контрольной работы.

### Варианты заданий контрольной работы №2

Вариант № n

**Правило выбора номера варианта контрольной работы:** номером варианта служит число n, равное сумме двух последних цифр зачетной книжки студента, если это не ноль. Если же две последние цифры номера зачетной книжки студента нули, то следует полагать  $n=19$ .

Во всех заданиях своего варианта вместо n необходимо подставить номер Вашего варианта.

#### Задание №1

*Найти интегралы.*

1.1  $\int ((n+1) \cdot x^n - n \cdot e^x) dx.$

1.2  $\int e^{n+\sin x} \cdot \cos x dx.$

1.3  $\int x^{20-n} \cdot \ln x dx.$

#### Задание №2

*Вычислить определенный интеграл*

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \cdot \sin 2x dx.$$

#### Задание №3

*Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями*

$$y = n^2 x, y = 0, x = e \text{ и гиперболой } y = \frac{1}{x}.$$

#### Задание №4

Вычислить объём тела, полученного в результате вращения плоской фигуры, ограниченной параболой  $y = \sqrt{x}$ , прямой  $X=n$  и осью абсцисс, вокруг оси абсцисс.

#### Задание №5

Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка.

$$n \cdot y' = x(1 + y^2).$$

#### Задание №6

Найти решение задачи Коши  $y' = 3x^2 + n$ , если  $y(1) = n$ .

#### Задание №7

Найти общее решение дифференциального уравнения  $y''' = \cos(39 - n)x$ .

#### Задание №8

Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям

$$y'' - (n + 1)y' + ny = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$$

#### Задание №9

Выяснить, выполняется ли необходимый признак сходимости. Если возможно, то сделать вывод о сходимости ряда.

$$9.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{kn^2 + 1}$$

$$9.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot k^n}$$

#### Задание №10

Исследовать сходимость рядов.

$$10.1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + 2n}{k + 1}.$$

$$10.2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3 + n}.$$

$$10.3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n + 1)k}{3^k}.$$

#### Задание №11

Исследовать знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k^n}$  на абсолютную (условную) сходимость.

#### Задание №12

Функцию  $f(x) = x^k \cdot e^{(k-10)x}$  разложить в степенной ряд по степеням  $x$ .

#### Задание №13

В первом ящике  $(10+3n)$  шаров: 9 белых, остальные черные, во втором – 20 шаров: 5 белых, 11 синих и 4 черных. Из каждого ящика достали по одному шару.

- 13.1** Какова вероятность того, что из первого ящика достали черный шар?  
**13.2** Какова вероятность того, что оба шара белые?  
**13.3** Какова вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой – черный?

**Задание №14**

Определить  $p_2$ , математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, заданной следующей таблицей распределения

$x_i$	0	1	$n+2$
$p_i$	0,7	$p_2$	0,1

**ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАНИЙ ВАРИАНТА  
КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2**

**Образец заданий контрольной работы**

**Задание №1**

Найти интегралы.

**1.1**  $\int \frac{5+x^2}{1+x^2} dx$ .

**1.2**  $\int e^{2+3\sin x} \cdot \cos x dx$ .

**1.3**  $\int x^5 \cdot \ln x dx$ .

**Задание №2**

Вычислить определенный интеграл.

$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \cdot \sin 2x dx$ .

**Задание 3**

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

$y = x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$  и гиперболой  $y = \frac{1}{x}$ .

**Задание №4**

Вычислить объём тела, полученного в результате вращения плоской фигуры, ограниченной параболой  $y = 2x - x^2$  и осью абсцисс, вокруг оси ординат.

**Задание №5**

Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка

$y \cdot y' = x(1 + y^2)$ .

**Задание №6**

Найти решение задачи Коши для уравнения  $y = y' \cos^2 x \cdot \ln y$ , если  $y(\pi) = 1$

**Задание №7**

Найти общее решение дифференциального уравнения  $y''' = 9\cos 3x$ .

### Задание №8

Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

### Задание №9

Выяснить, выполняется ли необходимый признак сходимости для заданных рядов. Если возможно, то сделать вывод о сходимости рядов. **9.1**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ; **9.2**  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ .

### Задание №10

Исследовать сходимость рядов.

**10.1**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$ .

**10.2**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$ .

**10.3**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ .

### Задание №11

Исследовать знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{7n+2}$  на абсолютную (условную) сходимость.

### Задание № 12

Функцию  $f(x) = xe^x$  разложить в степенной ряд по степеням  $x$ .

### Задание № 13

В первом ящике 20 шаров: 12 белых и 8 черных, во втором – 30 шаров: 6 белых, 15 синих и 9 черных. Из каждого ящика достали по одному шару.

**13.1** Какова вероятность того, что из первого ящика достали белый шар?

**13.2** Какова вероятность того, что оба шара белые?

**13.3** Какова вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой – черный?

### Задание №14

Определить  $p_2$ , математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, заданной следующей таблицей распределения

$x_i$	0	1	2	3	4
$p_i$	0,2	$p_2$	0,1	0,1	0,3

## Образец выполнения заданий контрольной работы

### Задание №1

**1.1** Найти интеграл  $\int \frac{5+x^2}{1+x^2} dx$

**Решение**

С помощью правил действия с дробями преобразуем подынтегральную функцию. Затем воспользуемся свойствами неопределённого интеграла и получим два табличных интеграла.

$$\int \frac{5+x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{(1+x^2)+4}{1+x^2} dx = \int \left( \frac{1+x^2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^2} \right) dx = \int dx + 4 \int \frac{dx}{1+x^2} = x + 4 \operatorname{arctg} x + C$$

**Ответ:**  $x + 4 \operatorname{arctg} x + C$ .

**1.2** Найти интеграл  $\int e^{2+3\sin x} \cos x dx$ .

**Решение**

Для нахождения этого интеграла применим метод замены переменной.

$$\int e^{2+3\sin x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} 2+3\sin x = t \\ 3\cos x dx = dt \\ \cos x dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{2+3\sin x} + C.$$

**Ответ:**  $\frac{1}{3} e^{2+3\sin x} + C$ .

**1.3** Найти интеграл  $\int x^5 \cdot \ln x dx$ .

**Решение**

Воспользуемся методом интегрирования по частям, положив  $u = \ln x$ ,  $x^5 dx = dv$

$$\begin{aligned} \int x^5 \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x^5 dx \Rightarrow \\ v = \int dv = \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} \end{array} \right| = \\ &= \frac{x^6}{6} \ln x - \int \frac{x^6}{6} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{1}{6} \int x^5 dx = \\ &= \frac{1}{6} x^6 \ln x - \frac{1}{6} \cdot \frac{x^6}{6} + C = \frac{1}{6} x^6 \left( \ln x - \frac{1}{6} \right) + C. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{1}{6} x^6 \left( \ln x - \frac{1}{6} \right) + C$ .

**Задание №2**

Вычислить определенный интеграл  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \cdot \sin 2x dx$

**Решение**



Преобразуем подынтегральную функцию с помощью формулы  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ . Затем применим метод замены переменной в определённом интеграле

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \cdot \sin 2x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x \, dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \cdot \sin x \, dx =$$

$$= \left. \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \\ \sin x \, dx = -dt \\ \text{при } x=0 \quad t=1 \\ \text{при } x=\frac{\pi}{2} \quad t=0 \end{array} \right| = -2 \int_1^0 t^4 \, dt = -2 \cdot \frac{t^5}{5} \Big|_1^0 = -\frac{2}{5}(0-1) = \frac{2}{5} = 0,4$$

**Ответ:** 0,4.

### Задание №3

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x, \quad y = 0, \quad x = 2 \text{ и гиперболой } y = \frac{1}{x}.$$

### Решение

Разобьём данную фигуру (рис. 1) на две части. Обозначим их площади  $S_1$  и  $S_2$ , тогда площадь всей фигуры  $S = S_1 + S_2$ . Найдём координаты точки  $A$ :

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1).$$

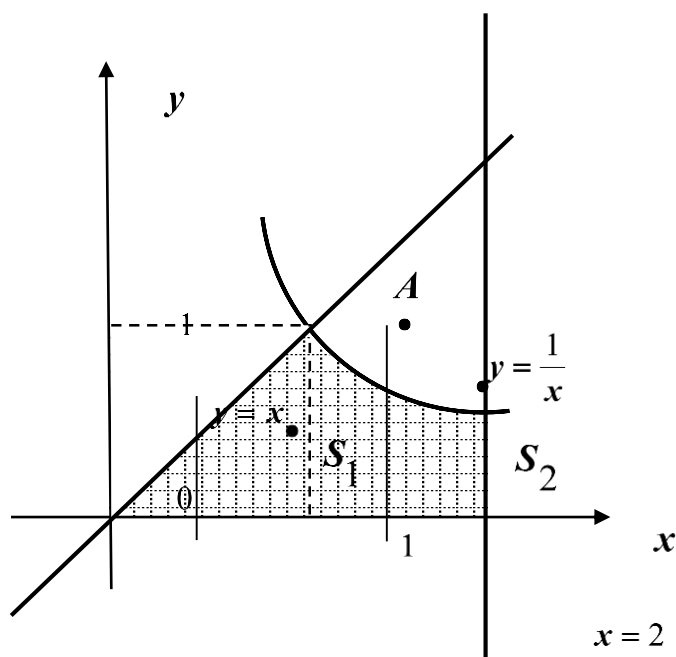
Значит, для  $S_1$   $0 \leq x \leq 1$ ,

для  $S_2$   $1 \leq x \leq 2$ .

Найдём площадь всей фигуры:

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^1 x \, dx + \int_1^2 \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \ln x \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \ln 2.$$



Рис

**Ответ:**  $\frac{1}{2} + \ln 2$ .

### Задание №4

Вычислить объём тела, полученного в результате вращения плоской фигуры, ограниченной параболой  $y = 2x - x^2$  и осью абсцисс, вокруг оси ординат.

### Решение

Заданная фигура имеет вид:

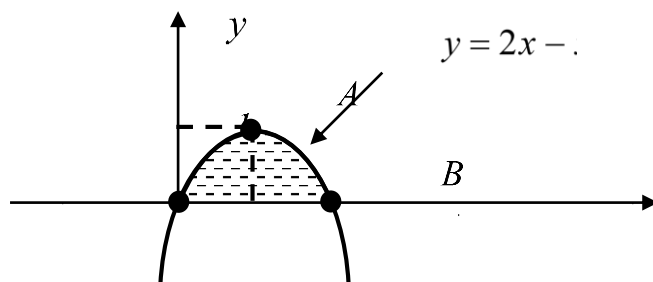


Рис.2

Известно, что объём тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x)$  при  $a \leq x \leq b$ , вычисляется по следующей формуле:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Из уравнения  $y = 2x - x^2$  выразим  $x$ .  $x^2 - 2x + y = 0$ ,  $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - y}$ .

Левая ветвь параболы  $OA$  определяется уравнением  $x = 1 - \sqrt{1 - y}$ , а правая  $AB$ :  $x = 1 + \sqrt{1 - y}$ . Объём заданного тела вращения можно рассматривать как разность объёма тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  части правой ветви  $AB$  при  $0 \leq y \leq 1$ , и тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  части левой ветви  $OA$  при  $0 \leq y \leq 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } V &= \pi \int_0^1 [1 + \sqrt{1 - y}]^2 dy - \pi \int_0^1 [1 - \sqrt{1 - y}]^2 dy = \pi \int_0^1 [1 + 2\sqrt{1 - y} + 1 - y - 1 + 2\sqrt{1 - y} - 1 + y] dy = \\ &= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 - y} dy = 4\pi \int_0^1 (1 - y)^{\frac{1}{2}} (-d(1 - y)) = \\ &= -4\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot (1 - y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = -\frac{8\pi}{3} (0 - 1) = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{8\pi}{3}$  кубических единиц.

### Задание №5

Найти общее решение уравнения  $y \cdot y' = x(1 + y^2)$ .

### Решение

Задано уравнение с разделяющимися переменными. Преобразуем его, полагая  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot (1 + y^2) \quad \text{или} \quad y dy = x(1 + y^2) dx.$$

Разделим обе части уравнения на  $(1 + y^2)$  и проинтегрируем.

$$\frac{y dy}{1 + y^2} = x dx \Rightarrow \int \frac{y dy}{1 + y^2} = \int x dx$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2} = \int x dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(1+y^2) = \frac{x^2}{2} + C \quad \text{или} \quad \ln(1+y^2) = x^2 + C.$$

Получили общее решение (или общий интеграл) заданного уравнения.

**Ответ:**  $\ln(1+y^2) = x^2 + C.$

### Задание №6

Найти решение задачи Коши для уравнения  $y = y' \cos^2 x \cdot \ln y$ , если  $y(\pi) = 1$

#### Решение

Заменим производную  $y'$  на  $\frac{dy}{dx}$ :  $y = \frac{dy}{dx} \cos^2 x \cdot \ln y$ . Умножим обе части уравнения на  $dx$ :  $y dx = \cos^2 x \cdot \ln y \cdot dy$ . Разделим переменные в данном уравнении, деля его обе части на произведение  $y \cdot \cos^2 x$ :  $\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\ln y}{y} dy$ .

Почленно интегрируя, получим искомый общий интеграл (общее решение):

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\ln y}{y} dy + C, \quad \operatorname{tg} x = \int \ln y d \ln y + C, \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \ln^2 y + C.$$

Подставляя начальные значения  $x = \pi$ ,  $y = 1$ , определим значение  $C$ :

$$\operatorname{tg} \pi = \frac{1}{2} \ln^2 1 + C, \quad C = 0.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид:  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \ln^2 y$ .

**Ответ:**  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \ln^2 y$ .

### Задание №7

Найти общее решение дифференциального уравнения  $y''' = 9 \cos 3x$ .

#### Решение

Последовательно интегрируя заданное уравнение, получим:

$$y'' = 9 \int \cos 3x dx = \frac{9}{3} \sin 3x + C_1 = 3 \sin 3x + C_1,$$

$$y' = \int (3 \sin 3x + C_1) dx = -\frac{3}{3} \cos 3x + C_1 x + C_2 = -\cos 3x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int (-\cos 3x + C_1 x + C_2) dx = -\frac{1}{3} \sin 3x + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3.$$

Заменим  $\frac{C_1}{2}$  на  $C_1$ , общее решение будет иметь следующий вид:

$$y = -\frac{1}{3} \sin 3x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

**Ответ:**  $y = -\frac{1}{3} \sin 3x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$

### Задание №8

Найти частное решение уравнения  $y'' - 3y' + 2y = 0$ , удовлетворяющее заданным начальным условиям  $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ .

### Решение

Задана задача Коши для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Вначале найдем общее решение уравнения.

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 2 \Rightarrow y_{0.0} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Имели случай действительных различных корней характеристического уравнения.

Найдем теперь производную первого общего решения. После чего воспользуемся начальными условиями для нахождения значений постоянных  $C_1, C_2$ .

$$y'_{0.0} = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 2 \\ y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 + 2C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 4 \\ C_2 = -2 \end{cases}$$

Подставляя найденные значения постоянных в общее решение, получаем частное решение, решение заданной задачи Коши:  $y = 4e^x - 2e^{2x}$ .

**Ответ:**  $y = 4e^x - 2e^{2x}$ .

### Задание №9

Выяснить, выполняется ли необходимый признак сходимости для заданных рядов. Если возможно, то сделать вывод о сходимости этих рядов.

$$9.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad 9.2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2.$$

### Решение

$$9.1 \text{ Общий член ряда } u_n = \frac{1}{n^2}. \text{ Вычислим его предел при } n \rightarrow \infty: \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Необходимый признак сходимости выполняется, но о сходимости ряда вывод сделать в таком случае невозможно.

$$9.2 \text{ Общий член ряда } u_n = n^2, \text{ вычислим его предел } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty \neq 0.$$

Необходимое условие сходимости для этого ряда не выполняется, следовательно, ряд расходится.

### Задание №10

$$10.1 \text{ Исследовать сходимость ряда } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}.$$

### Решение

$$\text{Общий член ряда имеет вид } a_n = \frac{n+2}{n+1}. \text{ Так как } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 \neq 0, \text{ то}$$

необходимое условие не выполняется, следовательно, ряд расходится из-за нарушения необходимого условия сходимости.

**Ответ:** ряд расходится.

**10.2** Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ .

**Решение**

Применим признак Даламбера.  $a_n = \frac{n}{3^n}$ ,  $a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$ ,

$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n}{3^n \cdot 3 \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$ . Так как  $l < 1$ , то ряд сходится.

**Ответ:** ряд сходится.

**10.3** Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3}$ .

**Решение**

Применим признак сравнения в предельной форме:  $a_n = \frac{n^2 + 1}{n^3} \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$ .

Так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится (гармонический), то и исходный ряд расходится.

**Ответ:** ряд расходится.

### Задание №11

Исследовать знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{7n+2}$  на абсолютную (условную) сходимость.

**Решение**

Общий член данного ряда имеет вид:  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{7n+2}$ .

**1.** Рассмотрим вначале ряд из абсолютных величин элементов заданного ряда:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7n+2}$ . Получили числовой ряд с положительными членами. Исследуем его на

сходимость. Так как при  $n \rightarrow \infty$   $\frac{1}{7n+2} \sim \frac{1}{7n}$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7n}$  расходится (гармонический

ряд, умноженный на  $\frac{1}{7}$ ), то и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7n+2}$  также расходится согласно предельного

признака сравнения. Следовательно, заданный знакопеременный ряд абсолютно не сходится.

**2.** Так как абсолютные величины членов данного знакочередующегося ряда убывают и предел модуля общего члена равен нулю:

$$1) \quad \frac{1}{9} > \frac{1}{16} > \dots; \quad 2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7n+2} = 0,$$

то по теореме Лейбница заданный ряд сходится. Поскольку абсолютной сходимости нет, получаем, что данный ряд сходится условно.

**Ответ:** за данный знакопеременный ряд сходится условно.

### Задание №12

Функцию  $f(x) = xe^x$  разложить в степенной ряд по степеням  $x$ .

#### Решение

В разложении  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$  заменим  $x$  на  $x^3$ , получим

$$e^{x^3} = 1 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^6}{2!} + \frac{x^9}{3!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Умножим теперь полученное равенство на  $x$ :  $x \cdot e^{x^3} = x + \frac{x^4}{1!} + \frac{x^7}{2!} + \frac{x^{10}}{3!} + \dots$ .

**Ответ:**  $xe^{x^3} = x + \frac{x^4}{1!} + \frac{x^7}{2!} + \frac{x^{10}}{3!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty)$

### Задание №13

В первом ящике 20 шаров: 12 белых и 8 черных, во втором – 30 шаров: 6 белых, 15 синих и 9 черных. Из каждого ящика достали по одному шару.

**13.1** Какова вероятность того, что из первого ящика достали белый шар?

**13.2** Какова вероятность того, что оба шара белые?

**13.3** Какова вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой – черный?

#### Решение

**13.1** По формуле вероятности случайного события получаем  $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{12}{20} = 0,6$ , так как общее количество шаров в первом ящике  $n=20$ , а белых среди них  $m=12$ .

**Ответ:** вероятность достать из первого ящика белый шар 0,6.

**13.2** Имеем произведение событий  $A$  и  $B$ , где  $A$  – появление белого шара из первого ящика,  $B$  – появление белого шара из второго ящика. При этом события  $A$  и  $B$  независимые. Найдем вначале их вероятности.

$$p(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}; \quad p(B) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

По формуле вычисления вероятности произведения независимых событий

$$\text{получаем } p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{25} = 0,12.$$

**Ответ:** вероятность достать два белых шара 0,12.

**13.3** Возможны два варианта:

1) белый шар достали из первого ящика, а черный из второго;

2) белый шар достали из второго, а черный из первого. В обоих случаях имеем произведения двух независимых событий. Найдем их вероятности.

Пусть событие  $A$  – появление белого шара из первого ящика, событие  $B$  – появление черного шара из второго ящика. Тогда

$$p(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}; \quad p(B) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}.$$

По формуле вычисления вероятности независимых событий получаем

$$p(A \cdot B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{50}.$$

Пусть событие  $C$  – появление белого шара из второго ящика,  $D$  – появление черного шара из первого ящика. Тогда

$$p(C) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}; \quad p(D) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}. \quad p(C \cdot D) = \frac{2}{25}.$$

Найдем теперь вероятность того, что достали один шар белый, а другой черный (безразлично какой из шаров из какого ящика) как вероятность суммы двух несовместных событий.

$$p(B + C) = p(A \cdot B) + p(C \cdot D) = \frac{9}{50} + \frac{2}{25} = \frac{13}{50} = 0,26$$

**Ответ:** вероятность достать один шар белый, а другой черный 0,26.

### Задание №14

Определить  $p_2$ , математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, заданной следующей таблицей распределения

$x_i$	0	1	2	3	4
$p_i$	0,2	$p_2$	0,1	0,1	0,3

### Решение

С помощью равенства  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$  вычислим значение  $p_2$   
 $p_2 = 1 - (p_1 + p_3 + p_4 + p_5) = 1 - (0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,3) = 1 - 0,7 = 0,3.$

Найдем теперь математическое ожидание заданной случайной величины

$$M(X) = \sum_{i=1}^5 x_i p_i = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 = 2.$$

Дисперсию будем вычислять по формуле  $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ , поэтому необходимо предварительно найти величину  $M(X^2)$

$$M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_5^2 p_5 = 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,3 = 6,4.$$

Получаем:  $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 6,4 - 2^2 = 2,4$ . Тогда  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2,4} \approx 1,55$ .

**Ответ:**  $p_2 = 0,3$ ;  $M(X) = 2$ ;  $D(X) = 2,4$ ;  $\sigma(X) \approx 1,55$ .

**Замечание.** Решение этого задания удобно оформить в виде следующей таблицы.

	$x_i$	$p_i$	$x_i p_i$	$x_i^2$	$x_i^2 p_i$
1	0	0,2	0	0	0
2	1	0,3	0,3	1	0,3
3	2	0,1	0,2	4	0,4
4	3	0,1	0,3	9	0,9
5	4	0,3	1,2	16	4,8
$\Sigma$	—	1	2	—	6,4

На пересечении четвертого столбца (произведения  $x_i p_i$ ) и нижней суммирующей строки получается значение математического ожидания заданной случайной величины  $X$ . А в шестом столбе в нижней строке вычисляется математическое ожидание квадрата заданной случайной величины  $M(X^2)$ . После этого остается найти дисперсию:  $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 6,4 - 4 = 2,4$ . Затем вычислить среднее квадратическое отклонение  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2,4} \approx 1,55$ .

## КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

### Интегральное исчисление

#### 1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица интегралов

Функция  $F(x)$  называется *первообразной* для функции  $f(x)$ , если

$$F'(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x) dx.$$

Так, например, функция  $F(x) = x^3$  служит первообразной для функции  $f(x) = 3x^2$ , так как  $F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$ .

Если функция  $f(x)$  имеет первообразную  $F(x)$ , то она имеет бесчисленное множество первообразных, совпадающее с множеством  $F(x) + C$ , где  $C$  – произвольная постоянная.

Совокупность всех первообразных для функции  $f(x)$  называется *неопределенным интегралом* от функции  $f(x)$ . Обозначают так:

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

где  $\int$  – знак интеграла,  $f(x)$  – подынтегральная функция,  $f(x) dx$  – подынтегральное выражение,  $x$  – переменная интегрирования,  $F(x)$  – какая-либо первообразная для функции  $f(x)$ ,  $C$  – произвольная постоянная.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых, зависящее от одного параметра  $C$ , которые получаются одна из другой путем параллельного сдвига вдоль оси  $Oy$ .

Нахождение неопределенного интеграла от заданной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является действием, обратным к дифференцированию. Из этого факта вытекают свойства неопределенного интеграла и таблица основных интегралов.

#### Свойства неопределенного интеграла

**Свойство 1.** Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению (производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции)

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx \quad \text{и} \quad \left(\int f(x) dx\right)' = f(x).$$

**Свойство 2.** Интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной

$$\int dF(x) = F(x) + C \quad \text{и} \quad \int F'(x) dx = F(x) + C.$$

**Свойство 3.** Постоянный множитель выносится за знак интеграла



$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k = \text{const}).$$

*Свойство 4.* Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

*Таблица простейших интегралов*

**1.**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$$

$$\mathbf{9.} \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0);$$

$$\mathbf{2.} \quad \int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \ln|x| + C;$$

$$\mathbf{10.} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0);$$

**3.**

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$\mathbf{11.} \quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C;$$

$$\mathbf{4.} \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$\mathbf{12.} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$$

$$\mathbf{5.} \quad \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\mathbf{13.} \quad \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\mathbf{6.} \quad \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\mathbf{14.} \quad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\mathbf{7.} \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\mathbf{15.} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$\mathbf{8.} \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\mathbf{16.} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

*Замечание.* Для запоминания табличных формул полезно, рассматривая каждую из них, задаваться вопросом: «для какой функции подынтегральная функция служит производной?». Например, в формуле №7 подынтегральная функция  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ . Как известно,  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ . Таким образом,  $F(x) + C = \operatorname{tg} x + C$ .

.

## 2. Непосредственное интегрирование

Для нахождения интегралов применяют следующие три метода интегрирования: метод непосредственного интегрирования, метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

*Непосредственным интегрированием* называется нахождение интегралов с помощью применения только таблицы, свойств неопределенных интегралов и, быть может, элементарных преобразований подынтегральной функции

.

### 3. Метод замены переменной

Суть *метода замены переменной* состоит в переходе от переменной интегрирования  $x$  к новой переменной с целью упрощения заданного интеграла.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится чаще всего с помощью формул двух видов:

1) Если  $f(x)$  непрерывна, то, полагая  $x=\varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$ —непрерывно дифференцируемая функция, получим  $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$ .

2) Если  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , то  $\int f(u)du = F(u) + C$ , где  $u = \psi(x)$ —непрерывно дифференцируемая функция.

*Замечание 1.* При использовании первой формулы  $x = \varphi(t)$  метод замены переменной называют еще *методом подстановки*. При применении второй формулы  $u = \psi(x)$  метод замены переменной называют также *методом введения нового аргумента*.

*Пример.* Найти интеграл  $\int \frac{xdx}{x^2 + 10}$ .

*Решение.*

$$\int \frac{xdx}{x^2 + 10} = \left| \begin{array}{l} x^2 + 10 = u \Rightarrow d(x^2 + 10) = du, \\ 2xdx = du \Rightarrow xdx = \frac{1}{2} du \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{1}{2} \cdot \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln (x^2 + 10) + C.$$

### 4. Метод интегрирования по частям

Если  $u(x)$  и  $v(x)$ —непрерывно дифференцируемые функции, то справедлива формула, которая называется *формулой интегрирования по частям*

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

Использование формулы целесообразно в тех случаях, когда интеграл  $\int v du$  в правой части проще исходного интеграла  $\int u dv$  или один из них выражается через другой. Для применения формулы интегрирования по частям подынтегральное выражение следует разбить на два множителя " $u$ " и " $dv$ ".

В качестве  $dv$  выбирается такое выражение, содержащее  $dx$ , из которого посредством интегрирования можно найти  $v$ . За  $u$  в большинстве случаев выбирается функция, которая при дифференцировании упрощается (многочлен, логарифмическая, обратная тригонометрическая и др.).

Метод интегрирования по частям можно применять несколько раз.

*Замечание 1.* В интегралах вида

$$\begin{array}{ll} \int P(x) \sin ax dx & dv = \sin ax dx \\ \int P(x) \cos ax dx & \text{выбирают: } u = P(x), \quad dv = \cos ax dx \\ \int P(x) e^{ax} dx & dv = e^{ax} dx. \end{array}$$

В этих формулах  $P(x)$ —многочлен,  $a$ —число. Интегрирование по частям следует применять столько раз, какова степень многочлена  $P(x)$ .

*Замечание 2.* В интегралах вида

$$\begin{array}{ll} \int \ln x \cdot x^k dx & u = \ln x \\ \int \operatorname{arctg} x \cdot x^k dx & \text{выбирают: } u = \operatorname{arctg} x \text{ и } dv = x^k dx \\ \int \operatorname{arcsin} x \cdot x^k dx & u = \operatorname{arcsin} x \end{array}$$

В этих формулах  $k$  – рациональное число.

*Пример 1.* Найти интеграл  $\int (4x - 3) \sin 2x dx$ .

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int (4x - 3) \sin 2x dx &= \left| \begin{array}{l} u = 4x - 3, \quad dv = \sin 2x dx, \\ du = 4 dx, \quad v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = \\ &= (4x - 3) \left( -\frac{1}{2} \cos 2x \right) - \int \left( -\frac{1}{2} \cos 2x \right) \cdot 4 dx = \frac{3 - 4x}{2} \cos 2x + \sin 2x + C. \end{aligned}$$

## 5. Определенный интеграл. Геометрический смысл и свойства определенного интеграла

Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$ . Разобьем отрезок  $[a, b]$  произвольно на  $n$  частей точками  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ . На каждом отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  произвольно выберем точки  $\xi_i$ , вычислим значения заданной функции  $f(x)$  в этих точках  $\xi_i, i = 1, 2, \dots, n$ . Составим интегральную сумму вида:

$$f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Очевидно, что интегральных сумм функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  можно составить бесконечное множество.

Если существует конечный предел интегральных сумм при условии, что длина наибольшего из частичных отрезков разбиения стремится к нулю:  $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$ , то его называют *определенным интегралом от функции  $f(x)$  по отрезку  $[a, b]$* . Обозначают

$$\text{так: } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Числа  $a$  и  $b$  при этом называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*.

Функция  $f(x)$  называется *интегрируемой* на  $[a, b]$ , если указанный предел существует и конечен. Любая непрерывная или кусочно-непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция является интегрируемой на этом отрезке.

### Геометрический смысл определенного интеграла

Если подынтегральная функция  $f(x)$  неотрицательна ( $f(x) \geq 0$ ) и непрерывна на отрезке интегрирования  $[a, b]$ , то определенный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  равен площади криволинейной трапеции  $aABb$  (рис. 1), ограниченной линиями  $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$ .

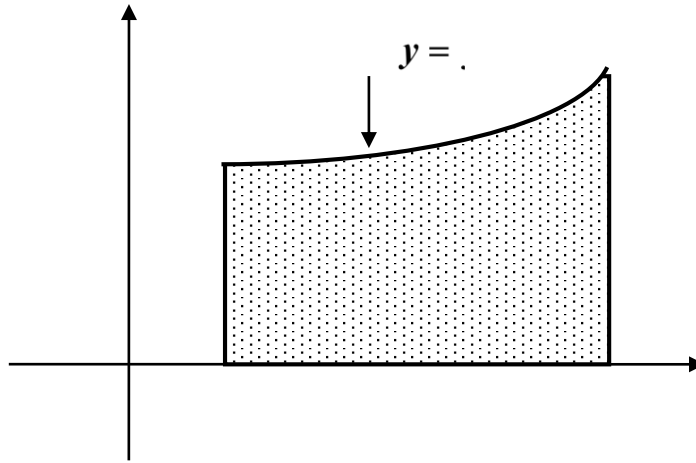


Рис. 1

### Свойства определенного интеграла

**Свойство 1.** При перестановке пределов интегрирования местами определенный интеграл меняет знак

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

**Свойство 2.** Интеграл с равными пределами равен нулю

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

**Свойство 3.** (О разбиении интеграла на сумму интегралов по пределам интегрирования). Для любого числа  $c$  справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Замечание.** Число  $c$  может как принадлежать, так и не принадлежать отрезку интегрирования  $[a, b]$ .

**Свойство 4.** Постоянный множитель выносится за знак интеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k = \text{const}).$$

**Свойство 5.** Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx.$$

**Свойство 6.** (О сохранении интегралом знака неравенства между подынтегральными функциями). Если  $f(x) \geq g(x)$  при  $x \in [a, b]$ , где  $a < b$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

**Следствие.** Определенный интеграл сохраняет знак подынтегральной функции, то есть, если  $f(x) \geq 0$  ( $f(x) \leq 0$ ) при  $x \in [a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \left( \int_a^b f(x) dx \leq 0 \right).$$

**Свойство 7. (Оценка определенного интеграла).** Если  $m$  и  $M$  – наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  и  $a < b$ , то справедливо неравенство

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

**Свойство 8. (Свойство о среднем).** Если  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то существует точка  $c \in [a, b]$  такая, что имеет место равенство

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

## 6. Методы вычисления определенных интегралов

Для вычисления определенных интегралов применяют формулу Ньютона-Лейбница и те же самые методы интегрирования, что и для нахождения неопределенных интегралов.

*Формула Ньютона – Лейбница:*

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где  $F(x)$  – какая-либо первообразная функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

*Формула интегрирования по частям* для определенного интеграла имеет следующий вид:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

где  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  – непрерывно дифференцируемые на отрезке  $[a, b]$  функции.

*Формула замены переменной* для определенных интегралов:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt,$$

где  $x = \varphi(t)$  – монотонная непрерывно дифференцируемая на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функция, причем  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ .

$$\text{Аналогично } \int_a^b f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u) du \Big|_{u=\psi(x)}, \psi(a) = \alpha, \psi(b) = \beta.$$

*Пример.* Вычислить интеграл  $\int_1^e \ln x dx$ .

*Решение.* Воспользуемся методом интегрирования по частям.

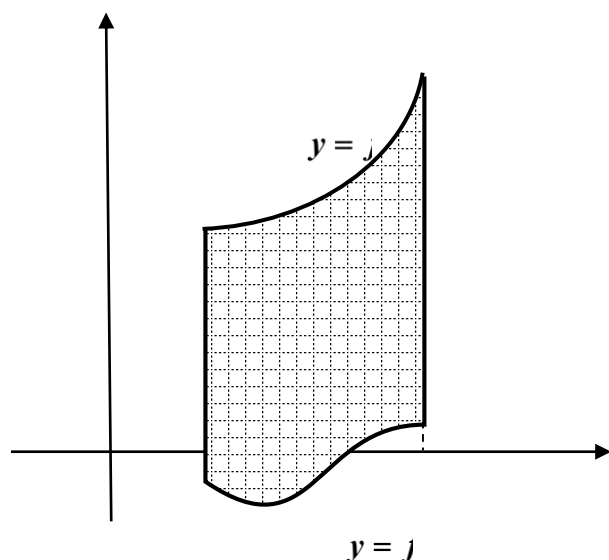
$$\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = dx, \\ du = \frac{dx}{x}, \quad v = x \end{array} \right| = \ln x \cdot x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x} = \ln e \cdot e - \ln 1 - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1.$$

*Ответ:*  $\int_1^e \ln x dx = 1$ .

## 7. Геометрические приложения определенных интегралов: площадь фигуры, объем тела, площадь поверхности вращения

### Вычисление площади плоской фигуры

## Площадь в прямоугольных координатах



Если криволинейная трапеция ограничена кривой  $y = f(x) \geq 0$ , отрезками прямых  $x = a$ ,  $x = b$  и отрезком  $[a, b]$  оси  $Ox$  (рис. 2), то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Площадь фигуры, ограниченной двумя кривыми  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$  ( $f_1(x) \leq f_2(x)$ ) и отрезками прямых  $x = a$ ,  $x = b$  (рис. 40), находится по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Рис.

## Вычисление объема тела и площади поверхности вращения

Пусть площадь сечения тела плоскостью перпендикулярной оси  $Ox$  равна  $S(x)$ , тогда объем части тела, заключенной между плоскостями  $x = a$  и  $x = b$  ( $a < b$ ), выражается интегралом

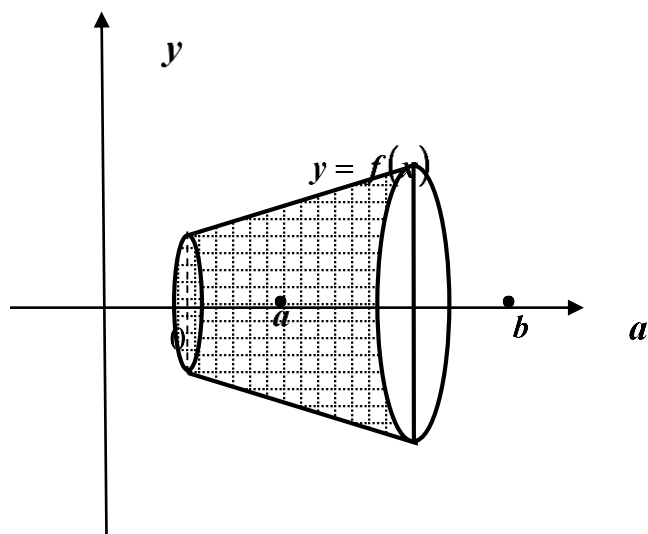
$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

В частности, объем тела вращения, получаемого вращением вокруг оси  $Ox$  дуги гладкой кривой  $y = f(x)$ , ( $f(x) \geq 0$ ),  $a \leq x \leq b$  (рис.3), вычисляется по формуле

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Площадь поверхности того же тела вращения выражается интегралом

$$S_{Ox} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f')^2} dx.$$



Рис

## Дифференциальные уравнения

### 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Общие понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные или дифференциалы этой функции. Если независимая переменная одна, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

*Порядком* дифференциального уравнения называется порядок старшей производной неизвестной функции, входящей в это уравнение.

Так, например,  $x^2 y''' + 3xy'' = y^3$  – обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, поскольку неизвестная функция  $y$  зависит от одной переменной  $x$ , а её старшая производная, входящая в уравнение,  $y'''$  – третьего порядка.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:  $F(x, y, y') = 0$ . В разрешенном относительно  $y'$  виде оно может быть записано так:  $y' = f(x, y)$ .

*Решением* дифференциального уравнения первого порядка называется такая дифференцируемая функция  $y = \varphi(x)$ , которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения*.

*Общим решением* дифференциального уравнения первого порядка  $y' = f(x, y)$  называется функция  $y = \varphi(x, C)$ , которая при любом допустимом значении произвольной постоянной  $C$  является решением данного уравнения.

Всякое решение  $y = \varphi(x, C_0)$ , получающееся из общего при конкретном значении произвольной постоянной  $C = C_0$ , называется *частным решением*.

Если общее решение находится в неявном виде  $\Phi(x, y, C) = 0$ , то оно называется также *общим интегралом*. Аналогично, если частное решение находится в неявном виде  $\Phi(x, y, C_0) = 0$ , то оно называется также *частным интегралом*.

Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения  $y' = f(x, y)$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ , называется *задачей Коши*.

График всякого решения  $y = \varphi(x)$  дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения. Общему решению  $y = \varphi(x, C)$  дифференциального уравнения первого порядка соответствует семейство интегральных кривых, зависящее от одного параметра – произвольной постоянной  $C$ , а частному решению, удовлетворяющему начальному условию  $y(x_0) = y_0$ , – одна кривая этого семейства, проходящая через заданную точку  $M_0(x_0; y_0)$ .

Встречаются дифференциальные уравнения, имеющие такие решения, которые не получаются из общего ни при каких значениях произвольной постоянной (включая  $C = \pm\infty$ ). Такие решения называются *особыми*. Графиком особого решения, если оно существует, является огибающая семейства интегральных кривых, то есть линия, которая в каждой своей точке касается, по меньшей мере, одной интегральной кривой.

## **9. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными**

Дифференциальное уравнение вида:  $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ ,

где  $M_1(x), M_2(x), N_1(y), N_2(y)$  – заданные функции, называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

*Метод решения:* разделив обе части уравнения на  $M_2(x), N_1(y)$ , (предполагая, что  $M_2(x) \neq 0$  и  $N_1(y) \neq 0$ ) и проинтегрировав, получим общий интеграл исходного уравнения:  $\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C$ .

*Замечание.* Если уравнения  $M_2(x)=0$  и  $N_1(y)=0$  имеют решения, то эти решения могут быть также и решениями заданного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Эти решения могут оказаться особыми.

### 10. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Функция двух переменных  $f(x, y)$  называется *однородной функцией  $n$ -го порядка* (или  *$n$ -го измерения*), если для любого  $\lambda$  выполняется равенство:  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \cdot f(x, y)$ .

Так, например, функция  $f(x, y) = 3x^2 - y^2$  – однородная второго порядка, поскольку для любого  $\lambda$  верно соотношение:

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2 = \lambda^2 \cdot (3x^2 - y^2) = \lambda^2 \cdot f(x, y).$$

А функция  $f(x, y) = \frac{x(x+y)}{y^2}$  – однородная нулевого порядка, так как для любого  $\lambda$  выполняется следующее равенство:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x \cdot (\lambda x + \lambda y)}{(\lambda y)^2} = \frac{\lambda^2 x(x+y)}{\lambda^2 y^2} = \frac{x(x+y)}{y^2} = f(x, y).$$

Дифференциальное уравнение вида:  $y' = f(x, y)$ , где  $f(x, y)$  – однородная функция нулевого порядка, называется *однородным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Однородное уравнение может быть преобразовано к виду:  $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$ .

*Метод решения:* однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно новой неизвестной функции  $u(x)$  с помощью подстановки:  $y = u \cdot x$ .

### 11. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, уравнения Бернулли

Уравнение вида  $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  – заданные функции, линейное относительно неизвестной функции  $y$  и ее производной  $y'$ , называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*.

*Метод решения:* с помощью замены  $y = u \cdot v$ , где  $u(x)$ ,  $v(x)$  – две новые неизвестные функции, линейное уравнение преобразуется к виду:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x) \quad \text{или} \quad u \cdot [v' + P(x) \cdot v] + u' \cdot v = Q(x)$$

и сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций  $u$  и  $v$ :

$$1) \quad v' + P(x) \cdot v = 0 \quad \text{и} \quad 2) \quad u' \cdot v = Q(x).$$

Из первого уравнения определяется функция  $v(x)$ , при этом в качестве  $v(x)$  выбирается какое-либо частное решение уравнения 1). Затем, подставляя  $v(x)$  во второе уравнение, находят функцию  $u(x)$ , после этого – общее решение исходного линейного уравнения  $y = u(x) \cdot v(x)$ .

*Замечание.* Некоторые дифференциальные уравнения нелинейные относительно функции  $y$  становятся линейными относительно  $x$ , если переменные  $x$  и  $y$  поменять местами. Например, уравнение  $y = (2x + y^3) \cdot y'$  не является линейным относительно  $y$ , но оно линейно относительно  $x$ , так как преобразуется к виду:



$y \cdot dx = (2x + y^3)dy \Rightarrow y \cdot x' - 2x = y^3 \Rightarrow x' - 2 \cdot \frac{x}{y} = y^2$ . Для решения таких уравнений применяется подстановка  $x = u \cdot v$ .

### Уравнение Бернулли

Дифференциальное уравнение вида  $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^m$ , где  $P(x)$ ,  $Q(x)$  – заданные функции, а  $m \neq 0$  и  $m \neq 1$ , называется *уравнением Бернулли*. Заметим, что это уравнение отличается от линейного уравнения лишь множителем  $y^m$  в правой части.

При  $m = 0$  уравнение Бернулли превратилось бы в линейное уравнение, а при  $m = 1$  оно стало бы уравнением с разделяющимися переменными.

*Метод решения:* метод решения уравнения Бернулли аналогичен методу решения линейного уравнения. С помощью подстановки  $y = u \cdot v$ , где  $u(x)$ ,  $v(x)$  – две новые неизвестные функции, оно преобразуется к виду:

$$u \cdot [v' + P(x) \cdot v] + u' \cdot v = Q(x) \cdot u^m \cdot v^m,$$

затем сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными:

$$1) \ v' + P(x) \cdot v = 0 \quad \text{и} \quad 2) \ u' = Q(x) \cdot u^m \cdot v^{m-1}.$$

## 12. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков, основные понятия

Уравнение вида  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  называется *дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка*. Решением такого уравнения служит всякая  $n$  раз дифференцируемая функция  $y = \varphi(x)$ , которая обращает данное уравнение в тождество.

Дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка может быть записано в виде, разрешенном относительно старшей производной  $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ .

*Задача Коши* для такого дифференциального уравнения  $n$ -го порядка состоит в том, чтобы найти решение, удовлетворяющее *начальным условиям*:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'_{(x_0)} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}_{(x_0)} = y^{(n-1)}_0,$$

где  $x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0$  – заданные числа.

В отличие от уравнения первого порядка здесь при заданном значении независимой переменной задается значение не только функции, но и ее производных до порядка на единицу ниже, чем порядок дифференциального уравнения.

Функция  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  называется *общим решением уравнения*  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , если при соответствующем выборе произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$  эта функция обращается в решение любой задачи Коши, поставленной для данного уравнения.

Всякое решение, получаемое из общего при конкретных значениях произвольных постоянных  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ , называется *частным решением* этого дифференциального уравнения.

Если общее решение уравнения  $n$ -го порядка находится в неявном виде  $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ , то оно называется *общим интегралом* данного уравнения. Аналогично, если частное решение находится в неявном виде  $\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0) = 0$ , то оно называется *частным интегралом*.

Интегрирование дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка в конечном виде удается произвести только в некоторых частных случаях либо при помощи

специальных способов, применяемых непосредственно к данному уравнению, либо предварительным понижением порядка уравнения.

### 13. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Уравнения вида  $y^{(n)} = f(x)$

Общее решение такого уравнения находится  $n$  – кратным интегрированием:

$$y^{(n)} = f(x),$$

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1 = f_1(x) + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int [f_1(x) + C_1] dx = \int f_1(x) dx + C_1 x + C_2 = f_2(x) + C_1 x + C_2,$$

... ..

$$y = f_n(x) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots C_{n-1} x + C_n.$$

### 14. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков

Линейным дифференциальным уравнением  $n$  – го порядка называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

Функции  $a_1(x), a_2(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x), f(x)$  непрерывны в некотором промежутке  $(a, b)$ .

Если правая часть уравнения  $f(x)$  не равна тождественно нулю при  $x \in (a, b)$ , то оно называется *неоднородным линейным уравнением*. Если  $f(x) = 0$  для всех  $x \in (a, b)$ , то уравнение называется *однородным линейным уравнением*. При этом уравнение  $y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) \cdot y = 0$  называют *линейным однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению с такой же левой частью*.

Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения определяется следующей теоремой.

**Теорема.** Если  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  – фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения  $n$  – го порядка, то функция  $y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$ , где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.

Система решений  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  называется *фундаментальной системой решений*, если эта система является линейно независимой при  $x \in (a, b)$ , то есть, эта система удовлетворяет соотношению

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0 \text{ при } x \in (a, b)$$

только при условии, что все коэффициенты равны нулю  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Линейное однородное дифференциальное уравнения вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

где коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  – некоторые действительные числа, называется *линейным однородным уравнением  $n$  – го порядка с постоянными коэффициентами*.

Для нахождения фундаментальной системы решений  $y_1, y_2, \dots, y_n$  линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, а затем и для построения общего решения, составляют *характеристическое уравнение*

$$2) k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

Это уравнение получается формальной заменой в исходном дифференциальном уравнении производных  $y^{(m)}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ) соответствующими степенями  $k^m$ , при этом сама функция  $y$  заменяется единицей.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами строится в зависимости от характера корней характеристического уравнения. Рассмотрим методику построения общего решения для уравнения второго порядка.

Для дифференциального уравнения второго порядка характеристическим служит квадратное уравнение. Возможны следующие три ситуации:

1) корни характеристического уравнения **действительные и различные**  $k_1 \neq k_2$ , ( $D > 0$ ), тогда общее решение будет иметь следующий вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

2) корни характеристического уравнения **действительные, но равные**  $k_1 = k_2 = k$ , ( $D = 0$ ), тогда общее решение исходного уравнения будет таким:

$$y = C_1 e^{kx} + x C_2 e^{kx};$$

3) корни характеристического уравнения **комплексные**  $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , ( $D < 0$ ), тогда общее решение строится следующим образом:  $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ .

## 15. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков, метод подбора частного решения

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения  $n$  – го порядка  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$  равно сумме какого – либо его частного решения  $\tilde{y}$  и общего решения  $y_0$  соответствующего однородного уравнения:  $y = \tilde{y} + y_0$ . Следовательно, для построения общего решения этого уравнения необходимо найти какое-либо частное его решение (предполагая уже известным общее решение соответствующего однородного уравнения).

*Метод подбора частного решения (метод неопределенных коэффициентов)*

Этот метод применим только к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами и только в том случае, когда правая часть уравнения имеет следующий вид:

$$f(x) = e^{\gamma x} \cdot [P_l(x) \cos \delta x + Q_m(x) \sin \delta x],$$

где  $\gamma$  и  $\delta$  – действительные числа,  $P_l(x)$  и  $Q_m(x)$  – многочлены от  $x$  соответственно  $l$  – й и  $m$  – й степеней.

Частное решение  $\tilde{y}$  в этом случае определяется формулой:

$$\tilde{y}(x) = x^\alpha \cdot e^{\gamma x} \cdot [U_s(x) \cos \delta x + V_s(x) \sin \delta x].$$

Здесь  $\alpha$  равно показателю кратности корня  $\gamma + i\delta$  (или, что одно и то же, пары комплексно-сопряженных корней  $\gamma \pm i\delta$ ) в характеристическом уравнении  $k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0$ . Если характеристическое уравнение такого корня не имеет, то следует положить  $\alpha = 0$ .  $U_s(x)$  и  $V_s(x)$  – полные (то есть содержащие все степени  $x$  от нуля до  $s$ ) многочлены от  $x$  степени  $s$  с неопределенными коэффициентами. Степень  $s$  равна наибольшему из чисел  $l$  и  $m$ .

**Замечание 1.** Если в выражение функции  $f(x)$  входит только одна из функций  $\cos \delta x$  или  $\sin \delta x$ , то в решение  $\tilde{y}(x)$  нужно все равно вводить обе эти функции.

Неопределенные коэффициенты многочленов, входящих в частное решение, находятся из системы линейных алгебраических уравнений, получаемых приравнованием коэффициентов подобных членов в правой и в левой частях исходного линейного неоднородного уравнения после подстановки в него  $\tilde{y}(x)$  вместо  $y$ ,  $\tilde{y}'(x)$  вместо  $y'$  и т. д.

**Замечание 2.** Если правая часть линейного неоднородного уравнения есть сумма нескольких функций рассматриваемой структуры

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_m(x),$$

а  $\tilde{y}_i(x)$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) – соответствующие частные решения уравнений:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f_i(x),$$

то сумма:  $\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) + \dots + \tilde{y}_m(x)$  является частным решением исходного линейного неоднородного уравнения.

### **Числовые ряды**

#### **16. Основные понятия. Необходимый признак сходимости**

Пусть задана бесконечная последовательность чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ . Выражение  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется *числовым рядом*, а числа  $a_1, a_2, a_3, \dots$  при этом называются членами ряда,  $a_n$  – общим членом ряда.

Сумму первых  $n$  членов ряда называют  $n$ -ой *частичной суммой ряда*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Если существует конечный предел  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , то его называют суммой ряда, а сам ряд называют *сходящимся*. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  не существует или бесконечен, то ряд называется *расходящимся* и говорят, что он не имеет суммы.

**Необходимый признак сходимости ряда:** если ряд  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Отсюда следует, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , то ряд расходится.

Указанный признак не является достаточным, т. е. если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то о сходимости ряда ничего нельзя сказать. Ряд может как сходиться, так и расходиться.

#### **17. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами**

##### *Признак сравнения*

Числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется *знакоположительным*, если все его элементы являются неотрицательными числами, т. е. если выполняется неравенство  $a_n \geq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Пусть заданы два ряда с неотрицательными членами

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

причем, начиная с некоторого номера  $n = n_0$ , выполняется неравенство:  $0 \leq a_n \leq b_n$ . Тогда справедливы утверждения:

➤ из сходимости «большого» ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  следует сходимость «меньшего» ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

➤ из расходимости «меньшего» ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  следует расходимость «большого» ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

### Признак сравнения в предельной форме

Если  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ряды с неотрицательными членами и существует конечный отличный от нуля предел:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$  (т. е.  $a_n \sim k b_n$  при  $n \rightarrow \infty$ ), то оба ряда или одновременно сходятся, или одновременно расходятся.

*Замечание: для использования признаков сравнения на практике применяются ряды, о которых известно, сходятся они или расходятся. Их называют эталонными.*

### Эталонные ряды

1.  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  – геометрическая прогрессия

при  $|q| < 1$  сходится, при  $|q| \geq 1$  расходится.

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  – ряд Дирихле;

при  $p > 1$  сходится, при  $p \leq 1$  расходится.

Отметим, что расходящийся гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  является частным случаем ряда Дирихле при  $p = 1$ .

*Пример.* Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5}{4n^3 + 1}$ , используя признак сравнения.

*Решение.* Общий член заданного ряда имеет вид:  $a_n = \frac{n^2 + 5}{4n^3 + 1}$ .

Воспользуемся признаком сравнения в предельной форме. Для этого в качестве ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  рассмотрим гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

Вычислим предел:  $k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 5) \cdot n}{(4n^3 + 1) \cdot 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 5n}{4n^3 + 1} = \frac{1}{4} \neq 0$

Поскольку гармонический ряд расходится, то и заданный ряд тоже расходится.

### Признак Даламбера

Пусть задан числовой ряд с неотрицательными членами  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ . Если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) при  $l < 1$  данный ряд сходится;
- 2) при  $l > 1$  данный ряд расходится;
- 3) при  $l = 1$  вопрос о сходимости ряда требует дополнительного исследования.

*Пример.* Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$  с помощью признака Даламбера.

*Решение.* В данном случае  $a_n = \frac{n!}{5^n}$ ,  $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$ .

Так как  $(n+1)! = n!(n+1)$ , получаем  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!5^n}{5^{n+1}n!} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)}{n!} = \frac{1}{5} < 1$ .

Поскольку  $l = \frac{1}{5} < 1$ , то заданный ряд сходится.

## 18. Знакопеременные числовые ряды

Сформулируем теперь признаки сходимости рядов, члены которых имеют разные знаки.

**Признак Лейбница:** *знакопередающий ряд  $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ , где  $u_n > 0$ , сходится, если выполняются следующие два условия:*

- 1)  $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \dots$ ;
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

*Следствие:* при замене суммы знакопередающегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, его  $n$ -ой частичной суммой  $S \approx S_n$  погрешность по абсолютной величине не превосходит модуля первого отброшенного члена ряда  $|R_n| < u_{n+1}$ .

Ряд с произвольным чередованием знаков его членов  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$  сходится, если сходится ряд из модулей его членов  $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$ . В этом случае исходный знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*.

Сходящийся знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  называется *условно сходящимся*, если

ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  расходится.

## 19. Функциональные ряды

Ряд  $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ , члены которого — функции от  $x$ , называется *функциональным рядом*. При каждом фиксированном  $x$  функциональный ряд превращается в числовой и оказывается либо сходящимся (абсолютно или условно сходящимся), либо расходящимся. Совокупность тех  $x$ , при которых функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда. Чаще всего область сходимости представляет собой какой-то промежуток оси  $Ox$ . Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

называется *степенным*. Здесь  $x_0$  – произвольная фиксированная точка,  $a_n$  – действительные числа, их называют коэффициентами степенного ряда.

При  $x_0 = 0$  степенной ряд имеет вид:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

Область сходимости степенного ряда представляет собой либо отрезок  $[x_0 - R, x_0 + R]$  либо интервал  $(x_0 - R, x_0 + R)$ , либо полуинтервал одного из видов  $[x_0 - R, x_0 + R)$  или  $(x_0 - R, x_0 + R]$ . Число  $R$  называется *радиусом сходимости* степенного ряда и находится по одной из формул

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Сумма функционального ряда представляет собой функцию, определенную в его области сходимости. Про нее говорят, что она разлагается в данный функциональный ряд. Сумма степенного ряда представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию внутри интервала сходимости. Причем коэффициенты ряда единственным способом выражаются через нее и ее производные.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Такой ряд называют *рядом Тейлора функции  $f(x)$* .

При  $x_0 = 0$ , в частности, ряд Тейлора имеет следующий вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

Ряд Тейлора с центром разложения  $x_0 = 0$  называют также *рядом Маклорена*.

Приведем разложения в ряд Тейлора (Маклорена) при  $x_0 = 0$  *основных элементарных функций*.

$$1. \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad x \in (-\infty < x < \infty)$$

$$2. \quad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad x \in (-\infty < x < \infty)$$

$$3. \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad x \in (-\infty < x < \infty)$$

$$4. \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad x \in (-1, 1].$$

$$5. \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad x \in [-1, 1].$$

$$6. \quad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!}x^n + \dots$$

$x \in [-1, 1]$  при  $m \geq 0$

Этими формулами удобно пользоваться для разложения в степенные ряды более сложных функций.

## 20. Приближенные вычисления с помощью степенных рядов

Степенные ряды находят широкое применение в приближенных вычислениях. При этом используются формулы разложения в степенные ряды основных элементарных функций, приведенные в пункте 2.

Для вычисления приближенного значения функции  $f(x)$  в ее разложении в степенной ряд сохраняются первые  $n$  членов, а остальные отбрасываются. Если необходимо оценить погрешность полученного приближенного значения, то следует оценить сумму отброшенных членов.

*Пример.* Вычислить приближенно  $e^{0,1}$ .

*Решение.* Воспользуемся разложением функции  $e^x$  в степенной ряд

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Для вычисления приближенного значения  $e^{0,1}$  возьмем три первых члена

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}. \text{ При } x = 0,1 \text{ получим: } e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{(0,1)^2}{2} = 1,1 + 0,005 = 0,105.$$

Итак,  $e^{0,1} \approx 0,105$ . Оценивать погрешность вычислений не будем, поскольку точность вычислений не задавалась.

*Ответ:*  $e^{0,1} \approx 0,105$ .

## Основы теории вероятностей

### 21. Случайные события. Вероятность случайного события

Случайным событием называется такое событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания. Испытанием может быть как какое-то целенаправленное действие человека, так и явление, происходящее независимо от



него. Случайные события обозначают большими латинскими буквами  $A, B, C, \dots$ . Рассмотрим примеры случайных событий:

1. Наступает день 1 июня – испытание, причем оно не зависит от человека. В течение всего дня 1 июня наблюдается ясная погода – событие.

2. Производится розыгрыш номеров лотереи «Спортлото» – испытание. Первым достали шар с номером 5 – событие.

Каждому случайному событию  $A$  ставится в соответствие число  $p(A)$ , принадлежащее отрезку  $[0, 1]$  и называемое *вероятностью события  $A$* . Пусть  $n$  – число всех возможных исходов испытания, а  $m$  – число тех исходов, которые приводят к наступлению события  $A$ , тогда вероятность определяется формулой.

$$p(A) = \frac{m}{n}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

Такую вероятность называют *классической вероятностью*.

*Пример.* Бросают игральный кубик, на гранях которого нанесены точками числа от 1 до 6. Найти вероятность того, что выпадет грань с нечётным числом.

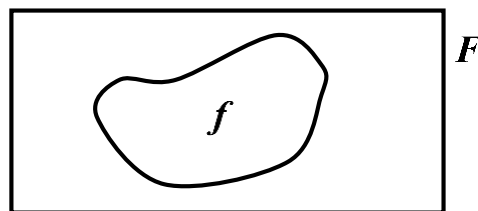
*Решение.* В результате проведенного испытания может выпасть любая грань, их всего шесть, следовательно, возможно шесть исходов  $n = 6$ .

На трех гранях кубика нанесены нечётные числа 1, 3, 5. Значит число исходов, которые приводят к наступлению события  $A$ , то есть, к выпадению грани с нечётным числом – три  $m = 3$ . Получаем  $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

*Ответ:*  $p(A) = \frac{1}{2}$ .

Формула классической вероятности предполагает конечное число исходов  $n$ , но бывают такие испытания, когда число исходов бесконечно.

Пусть  $F$  – некоторая плоская фигура, содержащая фигуру  $f$ .



В фигуру  $F$  наугад бросается точка. Поскольку фигура  $F$  содержит бесконечное множество точек, то число исходов такого испытания также бесконечно. Рассмотрим событие  $A$ , которое состоит в том, что брошенная точка попадет в фигуру  $f$ . Вероятность такого события называется *геометрической вероятностью* и определяется формулой.

$$p(A) = \frac{S_f}{S_F}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

$S_f$  и  $S_F$  – площади фигур  $f$  и  $F$ .

Геометрическая вероятность на прямой и в трехмерном пространстве определяется аналогично, но вместо площадей рассматриваются, соответственно, длины и объемы.

*Пример.* Человек стреляет в цель, представляющую собой квадрат со стороной  $a=10$  см, в центр которого вписан круг радиуса  $r=\frac{5}{\sqrt{\pi}}$  см. Найти вероятность попадания в этот круг.

*Решение.* В данном случае фигура  $F$  – квадрат, а фигура  $f$  – круг. Вычислим их площади

$$S_F = S_{KB} = a^2 = 10^2 = 100, \quad S_f = S_{KP} = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{25}{\pi} = 25. \quad \text{Получаем}$$

$$p(A) = \frac{S_f}{S_F} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ответ: } p(A) = \frac{1}{4}.$$

Событие, которое обязательно наступит в результате испытания, называется *достоверным*, его вероятность равна единице  $p(A)=1$ . Событие, которое не может произойти в результате испытания, называется *невозможным*, его вероятность равна нулю  $p(A)=0$ . Рассмотрим примеры таких событий.

1. В урне 8 шаров красного цвета. Вынули наугад один. Событие  $A$ : вынутый шар красного цвета. Это событие достоверное, так как какой бы из восьми шаров не достали – он будет красным,  $p(A)=1$ .

2. В урне 8 шаров красного цвета. Вынули наугад один. Событие  $A$ : вынутый шар белый. Это событие невозможное, поскольку ни один из восьми возможных исходов не может привести к событию  $A$ ,  $p(A)=0$ .

## 22. Сумма и произведение случайных событий

Пусть  $A$  и  $B$  – случайные события, которые могут произойти в результате некоторого испытания. *Суммой событий  $A$  и  $B$*  называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий. Обозначают  $A+B$ .

*Произведением событий  $A$  и  $B$*  называется событие, состоящее в одновременном или последовательном наступлении обоих событий. Обозначают  $A \cdot B$ .

Событие, состоящее в не наступлении  $A$ , называется событием, *противоположным* событию  $A$  и обозначается  $\bar{A}$ .

События  $A$  и  $B$  называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно.

События  $A$  и  $B$  называются *независимыми*, если наступление одного из них никак не влияет на вероятность наступления другого.

Рассмотрим примеры суммы и произведения событий.

1. В ящике шары трех цветов: 4 белых, 5 желтых и 7 зеленых. Достают наугад один. Событие  $A$ : достали белый шар. Событие  $B$ : достали зеленый шар.

Тогда сумма событий  $(A+B)$ : достали белый или зеленый шар. События  $A$  и  $B$  несовместны, поскольку достают только один шар.

Противоположное событие  $\bar{A}$ : достали не белый шар.

2. Два стрелка стреляют по одной и той же мишени. Событие  $A$  : первый стрелок попал в цель. Событие  $B$  : второй стрелок попал в цель.

Тогда сумма событий  $(A + B)$  : хотя бы один из стрелков попал в цель. Причем в этом примере события  $A$  и  $B$  совместны, они могут произойти оба.

Произведение событий  $(A \cdot B)$  : оба стрелка попали в цель.

Событие  $\overline{A \cdot B}$  противоположное произведению  $A \cdot B$  будет таким: ни один из стрелков не попал в цель.

События  $A$  и  $B$  в данном случае независимы, так как вероятность попадания в цель одним стрелком не зависит от попадания в цель другим стрелком.

Рассмотрим правила вычисления вероятностей сложных случайных событий через вероятности элементарных событий.

Вероятность суммы события определяется формулой:

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B)$$

Если события  $A$  и  $B$  несовместны, то эта формула упрощается (так как  $p(A \cdot B) = 0$ ) и принимает вид:

$$p(A + B) = p(A) + p(B)$$

Вероятность противоположного события  $\bar{A}$  вычисляется по следующему правилу:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Вероятность произведения событий определяется формулой

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B/A) = p(B) \cdot p(A/B)$$

Здесь  $p(B/A)$  – *условная вероятность* события  $B$  по отношению к  $A$ . Это вероятность события  $B$ , вычисленная в предположении, что  $A$  уже произошло.

Аналогично,  $p(A/B)$  – *условная вероятность* события  $A$  по отношению к событию  $B$ .

Формула вероятности произведения событий упрощается в том случае, когда эти события независимы, в этом случае она имеет вид:

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)$$

### 23. Случайные величины

Если каждому событию  $A$  из некоторого множества событий соответствует какое-то число  $X(A)$ , то говорят, что на рассматриваемом множестве событий определена *случайная величина*.

Например, со случайной величиной связано испытание бросания игрального кубика, так как любой исход приводит к числу, изображенному на выпавшей верхней грани.

Испытание, связанное с доставанием шарика из урны, в которой находятся шары разных цветов, не связано ни с какой случайной величиной. Но если шары перенумеровать, как при розыгрыше номеров игры «Спортлото», то также получится случайная величина.

Случайные величины принято обозначать большими буквами  $X, Y, \dots$ , а принимаемые ими значения – соответствующими маленькими буквами  $x, y, \dots$ .

Если значения, которые может принимать случайная величина  $X$ , образуют дискретный (конечный или бесконечный) ряд чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , то сама случайная величина называется *дискретной*. Если те значения, которые может принимать случайная величина  $X$ , заполняют целый конечный или бесконечный промежуток  $(a, b)$  оси  $Ox$ , то случайная величина называется *непрерывной*.

Подбрасывание игрового кубика (кости) связано с дискретной случайной величиной. Значения, которые она может принимать, образуют конечный дискретный ряд чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

*Рассмотрим пример непрерывной случайной величины.* Женщина вяжет шерстяные носки, для этого она использует моток ниток длиной 500 метров. Из-за сильного натяжения шерстяная нить иногда рвется, причем разрыв может произойти при любой длине нити. В этом случае имеет место непрерывная случайная величина, поскольку ее возможные значения (длина оторвавшейся нити, считая от начала мотка) заполняют промежуток  $(0, 500)$  оси  $Ox$ .

Правило, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется *законом распределения случайной величины*.

Закон распределения дискретной случайной величины, имеющей конечное число значений, задается таблицей распределения следующего вида:

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

При этом выполняется равенство  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ .

*Пример.* В первом ящике шары с номерами от одного до трех, во втором – шары с номерами один и два. Достают наугад по одному шару из каждого ящика и считают сумму выпавших номеров. Построить закон распределения, столбиковую диаграмму и полигон случайной величины.

*Решение.* Найдем все числовые значения, которые может принимать рассматриваемая случайная величина. Предположим, что из первого ящика достали шар с номером 1. Тогда возможны два варианта: из второго ящика также достали шар с номером 1, либо шар с номером 2. Получаем:  $X : 1+1, 1+2$ .

Если из первого ящика достали шар с номером 2, то из второго могли достать шар либо с номером 1, либо с номером 2. Получаем еще два значения случайной величины  $X : 2+1, 2+2$ .

Если из первого ящика вытащили шар с номером 3, то, аналогично рассуждая, получим еще два возможных варианта числовых значений случайной величины  $X : 3+1, 3+2$ .

Итак, рассматриваемая случайная величина может принимать шесть значений  $X : 2, 3, 3, 4, 4, 5$ .

Среди шести значений всего 4 различных. Вычислим вероятности каждого значения по формуле классической вероятности случайного события, учитывая, что всего шесть исходов,  $n = 6$ . Значение  $x_1 = 2$  принимается только в одном случае, поэтому

$p_1 = \frac{1}{6}$ . Значение  $x_2 = 3$  принимается два раза, поэтому соответствующая ему

вероятность  $p_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ . Значение  $x_3 = 4$  также получается в двух случаях, следовательно,  $p_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ . Число  $x_4 = 5$  встречается лишь один раз, поэтому  $p_4 = \frac{1}{6}$ . Таблица (закон) распределения рассматриваемой случайной величины будет иметь следующий вид:

$x$	2	3	4	5
$p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

## 24. Основные характеристики случайных величин

*Математическим ожиданием* дискретной случайной величины называется сумма произведений значений случайной величины на вероятности этих значений

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

или в сокращенной форме

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Математическое ожидание случайной величины характеризует среднее ожидаемое значение, принимаемое случайной величиной в больших сериях испытаний.

Случайные величины с равными математическими ожиданиями могут существенно отличаться по степени близости к нему. Показателем этой близости служит дисперсия.

*Дисперсией* случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Если обозначить математическое ожидание самой случайной величины через  $m = M(X)$ , то получим следующие формулы для вычисления дисперсии. Для дискретной

случайной величины

$$D(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - m)^2$$

*Средним квадратичным отклонением* случайной величины  $X$  называется величина  $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$ .

Для дисперсии случайной величины справедлива следующая формула, которая упрощает вычисления  $D(X) = M[(X)^2 - m^2] = M[X^2] - m^2$ , где  $m = M(X)$ .

## ПЕРЕЧЕНЬ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Понятие неопределенного интеграла.
2. Основные свойства неопределенного интеграла, использующиеся при нахождении интегралов.
3. Таблица интегралов.
4. Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

5. Метод замены переменной в неопределенном интеграле.
6. Понятие и геометрический смысл определенного интеграла.
7. Свойства определенного интеграла.
8. Формула Ньютона-Лейбница.
9. Применение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур.
10. Применение определенного интеграла к вычислению объема тела вращения.
11. Понятие дифференциального уравнения и его порядка.
12. Понятия общего и частного решений дифференциального уравнения первого порядка.
13. Постановка задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
14. Метод решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
15. Однородное дифференциальное уравнение первого порядка, Метод его решения.
16. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка, метод его решения. Уравнение Бернулли.
17. Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Построение его общего решения по корням характеристического уравнения.
18. Постановка задачи Коши для дифференциальных уравнений второго порядка.
19. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Структура его общего решения.
20. Понятие числового ряда, частичная сумма, сумма ряда. Понятие сходимости. Понятие числового ряда с положительными членами.
21. Необходимое условие сходимости.
22. Признак Даламбера сходимости числовых рядов с положительными членами.
23. Признак Коши сходимости числовых рядов с положительными членами.
24. Признак сравнения для рядов с положительными членами.
25. Знакопеременные числовые ряды. Понятия абсолютной и условной сходимости.
26. Понятие функционального ряда, область сходимости. Степенные ряды.
27. Разложение в степенные ряды элементарных функций.
28. Применения степенных рядов к приближенным вычислениям.
29. Понятие случайного события. Классическое определение вероятности случайного события. Свойства вероятности.
30. Геометрическая вероятность случайного события.
31. Совместные и несовместные события. Зависимые и независимые события.
32. Произведение событий. Вероятность произведения (в двух случаях).
33. Сумма событий. Вероятность суммы событий (в двух случаях).
34. Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины.
35. Закон распределения дискретной случайной величины.
36. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины.

## **СПИСОК ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА**

1. Туганбаев А. А. Основы высшей математики: Учебное пособие. – Спб.: «Лань», 2021. – 496 с.

2. Данко П.Е., Попов, А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. – М: «Мир и образование», 2016.

3. Данко П.Е., Попов, А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. – М: «Мир и образование», 2016.

### **ИНТЕРНЕТ-ИСТОЧНИКИ**

1. [www.allmath.ru](http://www.allmath.ru)
2. [www.math.ru](http://www.math.ru)
3. [pstu.ru/sources/math/](http://pstu.ru/sources/math/)